ON THE EVALUATION OF LARGE EDDY SIMULATION OF A WIND-TURBINE ARRAY BOUNDARY LAYER

D.Folch, F.X.Trias, A.Oliva

Heat and Mass Transfer Technological Center, Technical University of Catalonia
david.folch@upc.edu

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Introduction

Evaluate the performance of S3PR Large Eddy Simulation model on boundary layer and wind farm cases through different resolution meshes

Spatially filtered incompressible Navier-Stokes equations

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\boldsymbol{u}} + C(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{u}}) &= D(\overline{\boldsymbol{u}}) - \nabla p - \nabla \cdot \tau(\overline{\boldsymbol{u}}); \\ \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{u}} &= 0 \end{aligned}$$

$\tau(\overline{\boldsymbol{u}}) \approx -2\nu_e S(\overline{\boldsymbol{u}})$ is the LES closure
$S(\overline{\boldsymbol{u}}) = 1/2(\nabla \overline{\boldsymbol{u}} + \nabla \overline{\boldsymbol{u}}^T)$ is the rate-of-strain tensor
ν_e is the eddy viscosity for each model

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Quick S3PQR theory review

Besides the trace, several mathematical invariants can be calculated from the gradient tensor $\mathsf{G} = \nabla \overline{\boldsymbol{u}}$, for example:

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathsf{G}} &= (1/2)(tr^2(\mathsf{G}) - tr(\mathsf{G}^2)) \\
R_{\mathsf{G}} &= det(\mathsf{G}) \\
Q_{\mathsf{S}} &= (1/2)(tr^2(\mathsf{S}) - tr(\mathsf{S}^2)) \\
R_{\mathsf{S}} &= det(\mathsf{S}) \\
V_{\mathsf{G}}^2 &= 4(tr(S^2\Omega^2) - 2Q_S Q_\Omega)
\end{aligned}
$$

$\mathsf{S} = 1/2(\mathsf{G} + \mathsf{G}^T)$ and $\Omega = 1/2(\mathsf{G} - \mathsf{G}^T)$ are the symmetric and the skew-symmetric parts of the gradient tensor

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

S3PQR

The symmetric tensor GG^T formally based on the lowest-order approximation of the subgrid stress tensor is

$$\tau(\overline{\boldsymbol{u}}) = \frac{\Delta^2}{12}\mathsf{GG}^T + \mathcal{O}(\Delta^4)$$

Three invariants of this tensor can be defined and are directly related to the previous ones

$$\begin{aligned} P_{\mathsf{GG}^T} &= tr(\mathsf{GG}^T) = 2(Q_\Omega - Q_\mathsf{S}) \\ Q_{\mathsf{GG}^T} &= 2(Q_\Omega - Q_\mathsf{S})^2 - Q_\mathsf{G}^2 + 4tr(\mathsf{S}^2\Omega^2) \\ R_{\mathsf{GG}^T} &= det(\mathsf{GG}^T) = det(\mathsf{G})det(\mathsf{G}^T) = R_\mathsf{G}^2 \end{aligned}$$

CTTC UPC
Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

S3PQR

S3PQR: combination of two invariants of GG^T (Trias et al. (2015))

$$\nu_e^{S3PQ} = (C_{s3pq}\Delta)^2 P_{GG^T}^{-5/2} Q_{GG^T}^{3/2}$$
$$\nu_e^{S3PR} = (C_{s3pr}\Delta)^2 P_{GG^T}^{-1} R_{GG^T}^{1/2}$$
$$\nu_e^{S3QR} = (C_{s3qr}\Delta)^2 Q_{GG^T}^{-1} R_{GG^T}^{5/6}$$

where Δ is the subgrid characteristic length.

Two ways to determine the model constant C_{s3pq}:

1. Less or equal dissipation than Vreman's model.

$C_{s3pq} = C_{s3pr} = C_{s3qr} = \sqrt{3}C_{Vr} \approx 0.458$

2. The averaged dissipation of the models is equal to that of the Smagorinsky model.

$C_{s3pq} = 0.572,\ C_{s3pr} = 0.709,\ C_{s3qr} = 0.762$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Boundary layer and wind farm algorithm characteristics

- S3PQR LES model

- Semi-infinite domain that requires scaling procedure $y_\infty = L\frac{1+y}{1-y}$

- Pseudospectral: **Chebyshev polynomials** for Dirichlet and Newman boundary conditions

Main drawback (again): time-step of $O(1/N^2)$ for the convective term and $O(1/N^4)$ for the diffusive term!

High-resolution mesh computations are not feasible using fully explicit methods

CTTC UPC
Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Another algorithm details

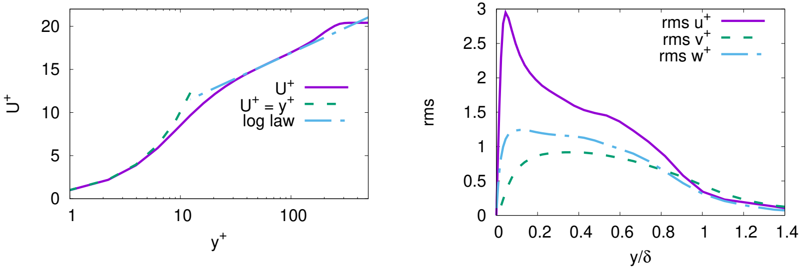
- $Re_{\delta*} = 1000$, where δ^* is the displacement thickness.
- Growing terms $GT(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{U})$, Spalart and Leonard (1987)
- Wind-turbine model, Calaf et al. (2010)
- We will test the zero mean pressure gradient case

Previous computations (Folch et al. (2023)):
Boundary layer and wind farm comparison between LES models: **Smagorinsky, Verstappen, WALE, Vreman, and all the S3PQR**.

Size domain for all of them $N_x x N_y x N_z = 32x64x32$ for streamwise, normal, and spanwise directions

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

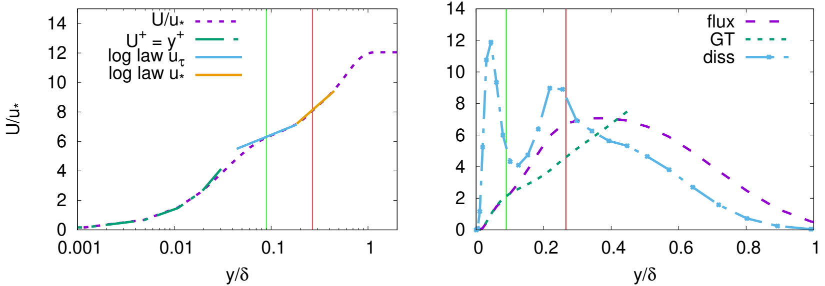
Boundary Layer



Case PR. Left: normalized average streamwise velocity profile, U^+; log law; $U^+ = y^+$. Right: rms u^+; rms v^+; rms w^+; δ is the boundary layer thickness

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

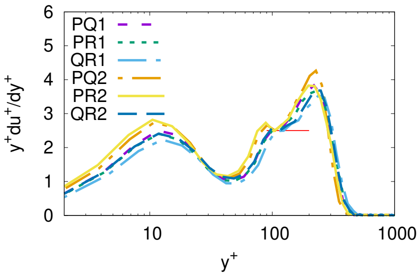
Wind farm

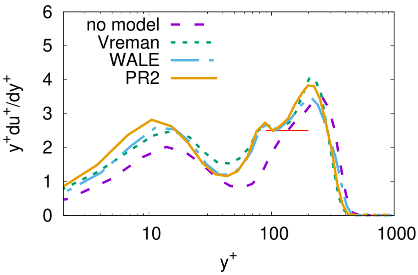


PR. Left: velocity. Right: Normalized mean kinetic energy contributions: **flux**, $\delta\Phi = - < uv > U/u_*^3$; **GT**, normalized growing terms; **diss**, $- < uv > \partial_y U/(u_*^3/\delta)$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Wind farm velocity derivative





Left: S3PQR models. Right: other LES models.

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Evaluation

We will test: the NO MODEL vs S3PR LES algorithm
For completeness, the physical interpretation of PR:

$$\nu_e^{S3PR} = (C_{s3pr}\Delta)^2 P_{GG^T}^{-1} R_{GG^T}^{1/2}$$

$$\nu_e^{S3PR} \propto \frac{|\det(G)|}{2((1/4)\Omega_i\Omega_i + (1/2)S_{ij}S_{ij})} \sim \frac{|\partial_t GG^T|}{|w|^2 + |\epsilon|}$$

Mesh sizes $N_x x N_y x N_z$:
$32x64x32 \rightarrow 64x64x64 \rightarrow 96x96x96 \rightarrow 128x128x128$

For 128^3: $\Delta x^+ \approx 20$, $\Delta z^+ \approx 6.7$ in wall units, and for the y-direction, 11 points within 9 wall units of the wall.

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Semi-implicit algorithm

Recall:

- S3PQR yields **non uniform (and non constant)** eddy viscosity.
- The time step for the diffusive term in explicit schemes goes as $O(1/N^4)$

Solution: to compute explicitly the convective term and implicitly the diffusive term.

Caution: **At every step, we should compute a triple convolution sum** such as:
ν_e x Scaling x Chebyshev derivative coefficients

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Semi-implicit solution

A general class of two-step methods:

$$Diffusion = (\nu_p + \nu_e)\nabla^2(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n)$$

where ν_p is the prescribed viscosity of the case

We will make a slight modification:

$$Diffusion = (0.5\nu_p)\nabla^2 u^{n+1} + \nabla \cdot ((0.5\nu_p + \nu_e)(\nabla u^n + \nabla(u^n)^T))$$

1. We calculate the matrix operator **only once** at the beginning with uniform and constant ν_p
2. Change in time-step: from $O(1/N^4)$ to $O(1/N^2)$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Evaluation results

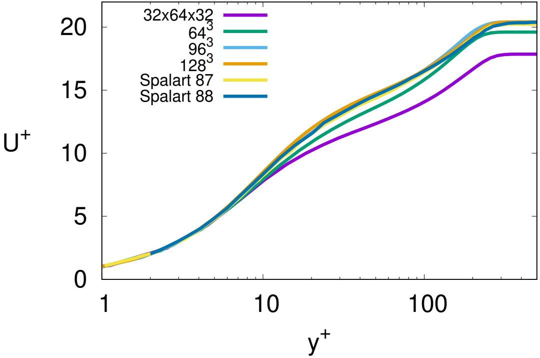
Boundary layer. Evolution of friction velocity:

Dimensions	No Model	S3PR
32x64x32	0.056	0.049
64^3	0.051	0.048
96^3	0.049	0.048
128^3	0.049	0.048
Sp-Le DNS	**0.049**	

Reference: Spalart and Leonart (1987) 264x60x170 or Spalart (1988) 256x64x192

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

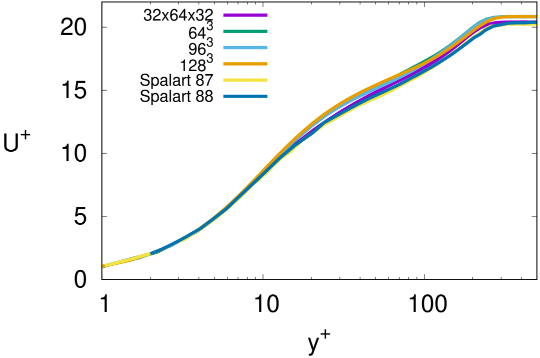
Boundary Layer. NO MODEL



Average streamwise velocity profile. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

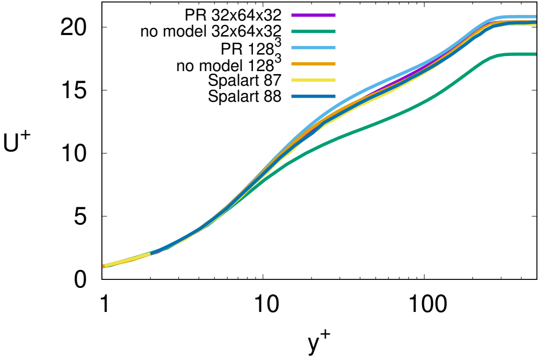
Boundary Layer. S3PR



Average streamwise velocity profile. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

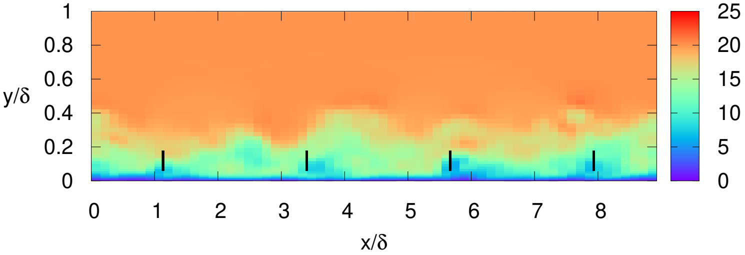
Boundary Layer. NO MODEL vs S3PR



Average streamwise velocity profile. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

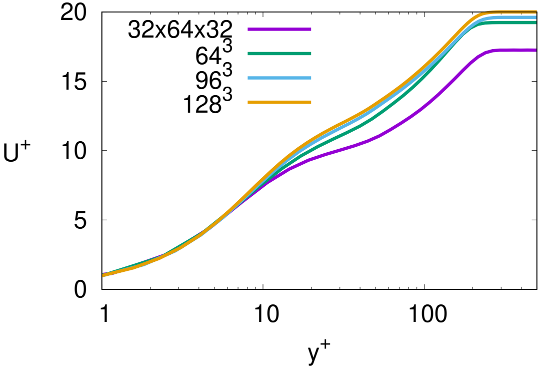
Wind farm. Instantaneous streamwise velocity



PR. Normalized streamwise velocity u^+. $64x64x64$

CTTC UPC
Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

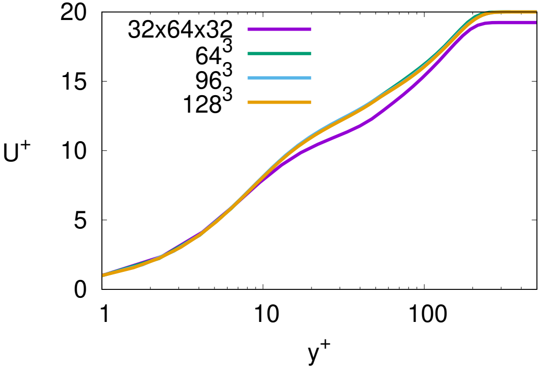
Wind farm. NO MODEL



Average streamwise velocity profile. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

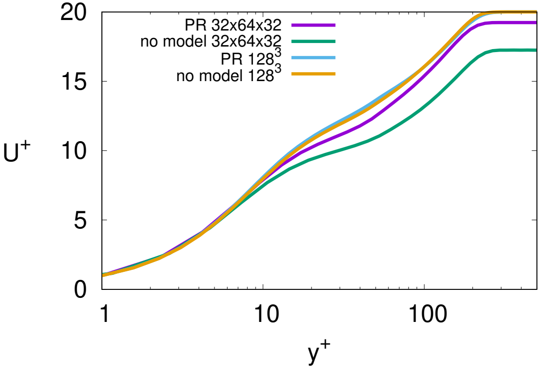
Wind farm. S3PR



Average streamwise velocity profile. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

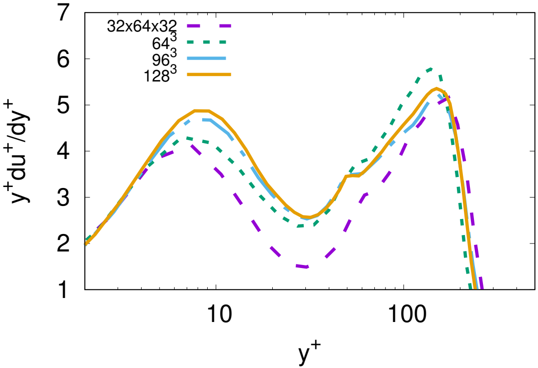
Wind farm. NO MODEL vs S3PR



Average streamwise velocity profile. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

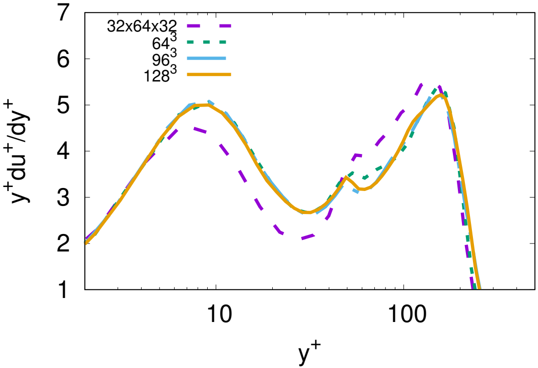
Wind farm. NO MODEL



Average streamwise velocity derivative. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

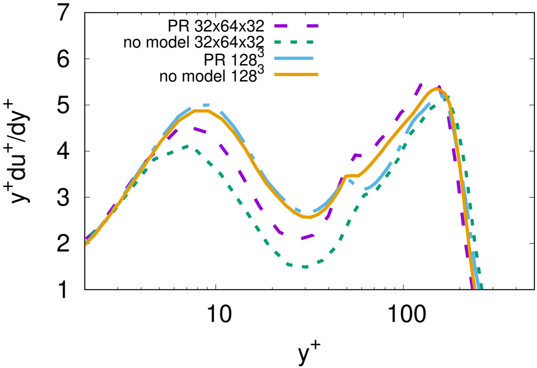
Wind farm. S3PR



Average streamwise velocity derivative. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Wind farm. NO MODEL vs S3PR



Average streamwise velocity derivative. Domain dimensions $N_x x N_y x N_z$

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Conclusions

1. The no-model algorithm seems to approach an asymptotic profile for finer resolution.

2. The S3PR method gives the same asymptotic profile, even for coarse resolution.

3. The semi-implicit algorithm allows these higher-resolution computations.

Thank you for your attention.

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

- **Trias et al. (2015)**: F.X. Trias, D. Folch, A. Gorobets, A. Oliva. Building proper invariants for eddy-viscosity subgrid-scale models. Physics of Fluids, vol. 27, no. 6, p. 065103
- **Spalart and Leonard (1987)**: P. R. Spalart, A. Leonard. Direct Numerical Simulation of Equilibrium Turbulent Boundary Layers. Turbulent Shear Flows 5. Springer, Berlin, Heidelberg.
- **Spalart (1988)**: P. R. Spalart. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$. J. Fluid Mech., vol. 187, pp. 61-98
- **Calaf et al. (2010)**: M. Calaf, C. Meneveau, J. Meyers. Large eddy simulation study of fully developed wind-turbine array boundary layers. Physics of Fluids 22
- **Folch et al. (2023)**: D. Folch, F.X. Trias, A. Oliva. Assessment of LES models for a fully developed wind-turbine array boundary layer. International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer: Rome, Italy, 11-15 September 2023". Begell House, 2023

Centre Tecnològic de Transferència de Calor
Laboratori de Termotècnia i Energètica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA